Capítulo 3

Diagonalización. Sistemas Dinámicos

Para un desarrollo lógico de los contenidos de este capítulo es preciso establecer la idea de base y dimensión. Una vez entendido esto analizaremos las distintas formas que toma la matriz de una aplicación lineal. La meta es conseguir una base con respecto a la cual la matriz asociada sea lo más sencilla posible. Aplicaremos los resultados obtenidos al estudio de sencillos sistemas dinámicos.

3.1. Base y dimensión

3.1.1. Definiciones previas

La idea de base es la de un conjunto de vectores lienalmente independientes capaz de generar a cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ en el qye estemos trabajando. Mas preciso:

DEFINICIÓN 3.1 *Un conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$,

$$B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n\}$$

es una base de $\mathbb{R}^n$ *si se cumple*

1. $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n$ *son vectores l. i. de* $\mathbb{R}^n$
2. $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n$ *es un sistema generador de* $\mathbb{R}^n$, *es decir si todo* $\overrightarrow{v}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *se puede escribir como combinación lienal de* $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n$.

EJEMPLO 3.1 $B_c = \{\overrightarrow{e}_1 = (1,0), \overrightarrow{e}_2 = (0,1)\}$ *es una base para* $\mathbb{R}^2$. *Está claro que* $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *son l. i. También vemos que si* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ *es otro vector de* $\mathbb{R}^2$, *entonces*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= (v_1, v_2) = v_1 (1,0) + v_2(0,1) \\ &= v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2 \end{aligned}$$

lo que demuestra que B_c *es sistema generador.*

Del mismo modo no es difícil probar que

$$B_c = \{\overrightarrow{e}_1 = (1,0,...,0), \overrightarrow{e}_2 = (0,1,0...,0), ..., \overrightarrow{e}_n = (0,....,0,1)\}$$

es base de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 3.2 *Los vectores* $\overrightarrow{u}_1 = (1,2,3)$ *y* $\overrightarrow{u}_2 = (4,5,-2)$ *son l. i. En cambio no son sistema generador. Sea, por ejemplo, el vector*

$$\overrightarrow{v} = (0,0,1)$$

y probamos si $\overrightarrow{v}$ *está o no está generado por* $\overrightarrow{u}_1$ *y* $\overrightarrow{u}_2$*. Para ello suponemos que existen* c_1 *y* c_2 *tales que*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= (0,0,1) = c_1\overrightarrow{u}_1 + c_2\overrightarrow{u}_2 \\ &= c_1(1,2,3) + c_2(4,5,-2) \end{aligned}$$

Esto equivale a escribir el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + 4c_2 \\ 0 &= 2c_1 + 5c_2 \\ 1 &= 3c_1 - 2c_2 \end{aligned}$$

Como la matriz del sistema es

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$r(A) = 2$ *y* $r\left(\overline{A}\right) = 3$*, entonces no hay solución. Esto significa que los vectores dados no forman un sistema generador.*

EJEMPLO 3.3 *Los vectores* $\overrightarrow{u}_1 = (1,2)$*,* $\overrightarrow{u}_2 = (0,1)$ *y* $\overrightarrow{u}_3 = (4,5)$ *son sistema generador pero no son l. i. Que son sistema genrador es tanto como decir que todo vector* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ *se escribe como*

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2) = c_1(1,2) + c_2(0,1) + c_3(4,5)$$

para ciertos c_1*,* c_2 *y* c_3*. Esto genera las igualdades*

$$\begin{aligned} c_1 + 4c_3 &= v_1 \\ 2c_1 + c_2 + 5c_3 &= v_2 \end{aligned}$$

Y puesto que el sistema anterior es compatible indeterminado hemos probado que los vectores dados forman un sistema generador.
Para ver que no son l.i. basta fijarse en la matriz que generan los vectores puestos como columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rango 2, *y esto es lo mismo que decir que los vectores son l.d.*

Supongamos que $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Entonces dado cualquier $\overrightarrow{u}$ existen números $c_1, ..., c_n$ tal que

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{u}_i$$

A los números $c_1, ..., c_n$ se les llama coordenadas del vector $\overrightarrow{u}$ con respecto a la base B.
Las coordenadas de un vector pueden cambiar al cambiar de base. No obstante, con respecto a una base dada, las coordenadas son únicas, esto es, si

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overrightarrow{u}_i$$

es la expresión de $\overrightarrow{u}$ respecto a la base B, y

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i' \overrightarrow{u}_i$$

es también la expresión de $\overrightarrow{u}$ con respecto a la base B, entonces $c_i = c_i'$, para $i = 1, ..., n$.
La prueba se basa en restar las dos expresiones de $\overrightarrow{u}$ para llegar a que

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_i') \overrightarrow{u}_i$$

Pero como los $\overrightarrow{u}_i$ son independientes entonces todos los $(c_i - c_i')$ son cero, i.e. $(c_i - c_i') = 0$ para todo i.

DEFINICIÓN 3.2 *Al número de elementos que constituye una base se le llama dimensión.*

Así tenemos que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2 y en general, la dimensión $\mathbb{R}^n$ es n.
Si se dispone de una base con n elementos entonces no puede haber $n+1$ vectores l.i. (esto es lo que básicamente se ha probado en el último de los ejemplos). Este hecho garantiza el que todas las bases de un mismo espacio $\mathbb{R}^n$ tienen n elementos. Todavía podemos decir algo más:

Proposición 3.1 *Todo conjunto de n vectores l.i. de $\mathbb{R}^n$ son base.*

La prueba de esta afirmación es un ejercicio.

Ejemplo 3.4 *Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$*

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \ y \ \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

Se pide conocer para qué valores de s estos tres vectores forman una base.
Como son tres vectores es suficiente probar que son l. i. para conluir que forman base. Por ello hacemos

$$\overrightarrow{0} = c_1\overrightarrow{v}_1 + c_2\overrightarrow{v}_2 + c_3\overrightarrow{v}_3$$

esto es

$$c_1 \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix}$$

Hacemos operaciones elementales: si s es distinto de cero entonces

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1-s^2 & -s \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s^3-s \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s^3-s \\ 0 & 0 & 2s-s^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Llegamos a una matriz cuyo rango es 3 ó 2 en función del menor $\begin{vmatrix} 1 & s^3-s \\ 0 & 2s-s^3 \end{vmatrix} = -s\left(s^2-2\right)$. *Este menor es cero sii $s=0$ (caso que hemos descartado, pues de lo contrario las operaciones hechas no son válida) o $s = \pm\sqrt[2]{2}$. De manera que si s es $\sqrt[2]{2}$ ó $-\sqrt[2]{2}$ los vectores no forman base.*
Si $s=0$ tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual tiene determinante cero. Eso asegura que si $s=0$ entonces los vectores tampoco forman base.

3.1.2. Cambios de base

Supongamos que $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ y $B' = \{\overrightarrow{u}'_1, \overrightarrow{u}'_2, ..., \overrightarrow{u}'_n\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^n$. Nos planteamos lo siguiente: sea $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ del que sabemos que se escribe en la primera base (o base antigua) como

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u}_i$$

(ó $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)_B$) y con respecto a la segunda, o base nueva, como

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{u}'_i$$

(ó $\overrightarrow{x} = (x'_1, ..., x'_n)_{B'}$).
La cuestión es saber qué relación hay entre las coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ de $\overrightarrow{x}$ en la base antigua y las coordenadas $(x'_1, ..., x'_n)$ de $\overrightarrow{x}$ en la base nueva.
Para contestar a esto procedemos escribiendo las coordenadas de los vectores de la base nueva pero con respecto a la base antigua. Esto es, escribimos $\overrightarrow{u}'_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}'_n$, cada uno de ellos, como combinaciones lineales de $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n$. Así

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{u}'_1 & = & a_{11}\overrightarrow{u}_1 + a_{21}\overrightarrow{u}_2 + ... + a_{n1}\overrightarrow{u}_n \\
\overrightarrow{u}_2 & = & a_{12}\overrightarrow{u}_1 + a_{22}\overrightarrow{u}_2 + ... + a_{n2}\overrightarrow{u}_n \\
 & \vdots & \\
\overrightarrow{u}'_n & = & a_{1n}\overrightarrow{u}_1 + a_{2n}\overrightarrow{u}_2 + ... + a_{nn}\overrightarrow{u}_n
\end{array}$$

que sustituido en $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n x'_i \overrightarrow{u}'_i$ da lugar a

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{u}'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \left(a_{1i}\overrightarrow{u}_1 + a_{2i}\overrightarrow{u}_2 + ... + a_{ni}\overrightarrow{u}_n\right) \tag{3.1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x'_i\right)\overrightarrow{u}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x'_i a_{i2}\right)\overrightarrow{u}_2 + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ni}\right)\overrightarrow{u}_n \tag{3.2}$$

Por otro lado se cumple $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{u}_i$. Tenemos entonces dos expresiones de un mismo vector en coordenadas con respecto a una misma base, $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{u}_i$ y $\overrightarrow{x} = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x'_i\right)\overrightarrow{u}_1 + \left(\sum_{i=1}^n x'_i a_{i2}\right)\overrightarrow{u}_2 + ... + \left(\sum_{i=1}^n x'_i a_{ni}\right)\overrightarrow{u}_n$. Éstas coordenadas han de coincidir, esto es las coordenas x_i han de coincidir con las de (3.2). Por tanto

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x'_i \\ &\vdots \\ x_n &= \sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ni}. \end{aligned}$$

O de otra forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x_{n'} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de matriz de cambio de base de B' a B.

NOTA 3.1 *Cuando un vector $\overrightarrow{x}$ venga escrito como $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ supondremos siempre que es con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.*

EJEMPLO 3.5 *Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$*

$$B_c = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$$

y la base B' formada por los vectores

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -1, 0)\,, \ \ \overrightarrow{u}_2 = (2, 1, 0) \ \ y \ \overrightarrow{u}'_3 = (0, 1, 1)$$

Nos proponemos encontrar la matriz de cambio de base de B' a B y las coordenadas del vector $v = (1, 1, 1)$ en la base B'. Para esto procedemos como en la discusión hecha arriba. Expresamos los vectores de la nueva base en coordenadas con respecto a los de la antigua. Los nuevos son

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -1, 0)\,, \ \ \overrightarrow{u}_2 = (2, 1, 0) \ \ y \ \overrightarrow{u}'_3 = (0, 1, 1)$$

y ya están dados en la antigua. Por consiguiente la fórmula de cambio de coordenadas queda

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x_{n'} \end{pmatrix}.$$

Si un vector tiene coordenadas $(1,1,1)$ *en la base antigua sus coordenadas en la nueva serán solución del sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x_{n'} \end{pmatrix}.$$

Después de algunas operaciones llegamos a que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

o simplemente $v = (1,1,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)_{B'}$.

3.1.3. Cambio de base para las aplicaciones lineales

En el capítulo 1 se ha establecido la forma de obtener la matriz asociada a una aplicación lineal. Bastaba con hacer la imagen de los vectores de la base canónica para obtener los vectores columna de la matriz buscada. La matriz que se obtiene es la asociada a la aplicación lineal en cuetión, pero con respecto a la base canónica.
Si pretendiéramos hallar la matriz asociada a la aplicación lineal, pero con respecto a otra base distinta de la canónica, habría que hacer las imágenens de cada uno de los vectores de esa otra base. Aunque el procedimiento es idéntico la matriz obtenida sería distitnta a la anterior. Sin embargo, podemos aprovecharnos de la fórmula (3.3) para conocida la matriz de la aplicación lineal en una base, saber cómo es en cualquier otra. Comenzamos con un ejemplo.

Ejemplo 3.6 *Sea la aplicación lineal* A *definida como*

$$A\left(x_1, x_2\right) = \left(6x_1 - 2x_2, 6x_1 - x_2\right)$$

Como $A(1,0) = (6,6)$ *y* $A(0,1) = (-2,-1)$ *entonces la matriz de* A *en la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora la nueva base

$$B' = \{\overrightarrow{u}_1, \ \overrightarrow{u}_2\}$$

donde $\overrightarrow{u}_1 = (1,2)$ *y* $\overrightarrow{u}_2 = (2,3)$. *Puesto que nos dan los vectores de la base nueva en coordenadas con respecto a la base antigua, relacionamos coordenadas antguas* (x_1, x_2) *con coordenadas nuevas* (x_1', x_2') *y lo hacemos mediante la fórmula (3.3):*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Como la imagen de un vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ *es* $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$ *con*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Pero como para $\overrightarrow{y}$ *la fórmula de cambio de base también es aplicable, esto es*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

De esto se deduce

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

que es la nueva expresión para la imagen de un vector, por la aplicación lineal A, *en coordenadas con respecto a la base* B'. *Con otras palabras, que la matriz asociada a* A *en la base* B' *es*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos extender el estudio del ejemplo previo a cualquier aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$[1]. Supongamos pues que tenemos dos bases

$$B = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n\}$$

[1]El estudio que hacemos sirve también para el caso en el que las aplicaciones lineales vayan de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con $m \neq n$.

y

$$B = \{\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, ..., \overrightarrow{e}'_n\}$$

de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que C es la matriz de cambio de base, de manera que si $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ en la base B y $\overrightarrow{x} = (x'_1, ..., x'_n)$ en la base B', entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Sea ahora la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz asociada es $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la cual, con respecto a la base B se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si la imagen del vector $\overrightarrow{x}$ es $\overrightarrow{y}$ entonces

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$$

esto es

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde todas las coordenadas están expresadas con respecto a la base B. Queremos encontrar la matriz A' de la misma aplicación lineal pero con respecto a la matriz B'. Se puede proceder de dos formas, o bien se calculan las imágenes de todos los vectores $\overrightarrow{e}'_j$, y se escriben, con respecto a esta base B', como las columnas de A'. No obstante tenemos la siguiente alternativa. Como

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$AC \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

lo cual implica, multiplicando a ambos lados por la izquierda, que

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

esto es, que la matriz asociada a la aplicación lineal en la base B' es

$$A' = C^{-1}AC.$$

Ejemplo 3.7 *Buscamos la matriz asociada, con respecto a la base canónica, de la aplicación lineal A de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que consiste en realizar una simetría con respecto a la recta $x + 2y = 0$.*
Para ello buscamos primereamente una base con respecto a la cual, encontrar la matriz asociada sea sencillo. Pensamos en un vector director de dicha recta y en uno normal: $\overrightarrow{u}_1 = (2, -1)$ y $\overrightarrow{u}_2 = (1, 2)$. Estos dos forman una base. Además es trivial verificar que

$$A\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}_1, \ A\overrightarrow{u}_2 = -\overrightarrow{u}_2$$

Así pues, en la base $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pues $\overrightarrow{u}_1 = (1, 0)_B$ y $-\overrightarrow{u}_2 = (0, -1)_B$.
Si lo que queremos ahora es la matriz en la nueva base B_c, basta con hallar la matriz de cambio de base; para eso tenemos que escribir los vectores de la base nueva en coordenadas con respecto a la base B. Veamos: los sistemas que tienen lugar son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las soluciones son $a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$ *y* $c = -\frac{1}{5}, d = \frac{2}{5}$. *Esto significa que*

$$\begin{aligned} (1,0)_{B_c} &= \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)_B \\ (0,1)_{B_c} &= \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)_B \end{aligned}$$

Por tanto

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

y la matriz pedida es

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.8 *Supongamos que la aplicación lineal* A *de* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^3$ *se define como*

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_3, x_2 - x_3)$$

Encontrar la matriz asociada a esta aplicación lineal con respecto a la base

$$B' = \{\overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}'_2 = \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}'_3 = \overrightarrow{e}_2\}.$$

Como la matriz de la aplicación lineal (en $B_c = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$*) es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de cambio es

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz pedida es

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2. Forma diagonal

DEFINICIÓN 3.3 *Una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice diagonalizable si existe una base en $\mathbb{R}^n$ en la que A es diagonal.*

También hablaremos de la diagonalización de una matriz en el sentido de que sea diagonalizable la aplicación lineal que define la matriz.
Lo que nos planteamos es dada una A, cuya forma no es diagonal, buscar una base con respecto a la cual sí lo sea. Por ejemplo, encontrar una base con respecto a la cual la matriz de $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sea diagonal signifca hallar una base $B' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ tal que se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{v}_1 &= \lambda_1 \overrightarrow{v}_1, \\ A\overrightarrow{v}_2 &= \lambda_2 \overrightarrow{v}_2. \end{aligned}$$

Es obvio que así, con respecto a B', la matriz de A es

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Las igualdades de arriba nos conducen a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.4 *Un vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama vector propio o autovector de la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si existe un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x};$$

al número λ se le llama valor propio o autovalor de la aplicación lineal A asociado al autovector $\overrightarrow{x}$.

Vemos que si $\overrightarrow{x}$ es un autovector de A con autovalor λ, entonces cualquier vector de la forma $\overrightarrow{v} = s\overrightarrow{x}$, con $s \in \mathbb{R}$, también es autovector de A con autovalor λ. Probar esta afirmación es automático:

$$A(\overrightarrow{v}) = A(s\overrightarrow{x}) = sA(\overrightarrow{x}) = s\lambda\overrightarrow{x} = \lambda(s\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{v}.$$

Retomemos el inicio de esta sección. Sea la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y supongamos que $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n$ son n autovectores l.i. con autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ respectivamente, es decir

$$A\overrightarrow{u}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1, \cdots A\overrightarrow{u}_n = \lambda_n \overrightarrow{u}_n$$

Puesto que $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n$ forman una base, con respecto a ésta la matriz asociada a A es

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

la cual es diagonal.
Al revés también ocurre, si la matriz de A es diagonal con respecto a una cierta base, entonces todos los elementos de esa base son autovectrores de la aplicación lineal A.

Proposición 3.2 *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicación lineal. Entonces*

$$\mathbb{R}^n \text{ tiene una base de autovectores de } A \Leftrightarrow A \text{ diagonalizable}$$

Proposición 3.3 *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable sii existe una matriz (no singular[2]) $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que la matriz*

$$A' = C^{-1}AC$$

es diagonal. Además las columnas de C son las coordenadas de los autovectores de A y los elementos de la diagonal de A' son los autovalores correspondientes.

Ejemplo 3.9 *Consideremos de nuevo la matriz (o aplicación lineal)*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

dada con respecto a una base $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$. Esto significa que

$$A(\overrightarrow{u}_1) = 6\overrightarrow{u}_1 + 6\overrightarrow{u}_2$$

y que

$$A(\overrightarrow{u}_2) = -2\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2.$$

Construimos una nueva base,

$$B' = \{\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{u}_1 + 2\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_2 = 2\overrightarrow{u}_1 + 3\overrightarrow{u}_2\}.$$

[2]Singular significa que no posee inversa, o que su determinante es nulo.

Vemos que

$$\begin{aligned}
A(\overrightarrow{v}_1) &= A(\overrightarrow{u}_1 + 2\overrightarrow{u}_2) = A(\overrightarrow{u}_1) + 2A(\overrightarrow{u}_2)\\
&= 6\overrightarrow{u}_1 + 6\overrightarrow{u}_2 + 2(-2\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2)\\
&= 2\overrightarrow{u}_1 + 4\overrightarrow{u}_2 = 2(\overrightarrow{u}_1 + 2\overrightarrow{u}_2) = 2\overrightarrow{v}_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A(\overrightarrow{v}_2) &= A(2\overrightarrow{u}_1 + 3\overrightarrow{u}_2) = 2A(\overrightarrow{u}_1) + 3A(\overrightarrow{u}_2)\\
&= 2(6\overrightarrow{u}_1 + 6\overrightarrow{u}_2) + 3(-2\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2)\\
&= 6\overrightarrow{u}_1 + 9\overrightarrow{u}_2 = 3(2\overrightarrow{u}_1 + 3\overrightarrow{u}_2) = 2\overrightarrow{v}_2.
\end{aligned}$$

Si empleamos coordenadas es mucho más fácil

$$\begin{aligned}
A(\overrightarrow{v}_1) &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{v}_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A(\overrightarrow{v}_2) &= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\\
&= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{v}_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con respecto a la base B', la matriz asociada es

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de base es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y se puede comprobar que

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2.1. Cálculo de autovectores y autovalores

Supongamos que $\overrightarrow{x}$ es un autovector de autovalor λ para una aplicación lineal A que va de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Sea $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ la base elegida y

$$\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)_B = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u}_i.$$

Supongamos que $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal A. Puesto que $A(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$ equivale a

$$A(\overrightarrow{x}) = \lambda I \overrightarrow{x}$$

entonces

$$(A - \lambda I) \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Esto significa que el vector no nulo $\overrightarrow{x}$ es solución del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es la matriz cuadrada $A - \lambda I$. Según el Teorema de Rouché-Frobenius, para que esto ocurra es necesario y suficiente que el rango de $A - \lambda I$ sea menor que n, y esto equivale a que su determinante sea cero. Ahora el determinante

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

es un polinomio de grado n, y hemos visto que para que λ sea autovalor es necesario que raíz de este polinomio. A este polinomio $p(\lambda)$ se le llama polinomio característico de la matriz A y acabamos de ver que todas sus raíces son autovalores de dicha matriz.
Una vez calculadas cada una de las raíces λ de p, vamos al sistema $(A - \lambda I) \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ y para cada una de ellas obtenemos sus autovectores $\overrightarrow{x}$ asociados. Esto completa el proceso de búsqueda de autovalores y autovectores.

Ejemplo 3.10 *Sea la matriz* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Buscamos sus autovalores y autovectores. Para ello calculamos el polinomio característico y sus raíces:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6$$

y las soluciones de la ecuación de segundo grado $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$, *son los autovalores: i.e.*

$$\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = 6.$$

Calculemos ahora los autovectores asociados:

1. $\lambda_1 = -1$: *resolvemos* $(A - (-1)I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *esto es*

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos el mayor número de vectores solución que sean l.i. Como $n = 2$ *y* $k = 1$ *sólo hay uno, tomemos como autovector a*

$$\overrightarrow{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_2 = 6$: *al resolver* $(A - 6I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *llegamos al sistema*

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, Solution is: cuyas soluciones se escriben com0

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Se toma como autovector asociado a

$$\overrightarrow{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Como $A\overrightarrow{x}_1 = -\overrightarrow{x}_1$ *y* $A\overrightarrow{x}_2 = 6\overrightarrow{x}_2$ *la matriz en la base formada por* $\overrightarrow{x}_1$ *y* $\overrightarrow{x}_2$ *(que es base de autovectores) es*

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz de cambio de base es

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se cumple que

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

La forma diagonal buscada de A es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 3.11 *Idem con la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda + \lambda^2 + 3$$

y sus raíces son $-3, -1$. Para la primera el sistema que le corresponde para calcular los autovectores es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como vectorpor ejemplo, tomamos a

$$\overrightarrow{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$ el sistema de autovectores es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el autovector que podemos elegir es

$$\overrightarrow{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos de nuevo una base de autovectores y con respecgto a ésta la matriz asociada es

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y la de cambio de base es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Existen casos para los que no existe forma diagonal

EJEMPLO 3.12 *La matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ *no se puede diagonalizar.*
Como $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, *el único autovalor es* $\lambda = 2$ *(es doble). Los autovectores asociados a éste son solución del sistema*

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como todas las soluciones de este sistema se escriben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \; s \in \mathbb{R},$$

el vector (l.i.) que elegimos es

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No hay más autovectores l.i., no hay pues una base de autovectores y por tanto A *no es diagonalizable.*

También hay casos en los que los autovalores son complejos y por tanto los autovectores correspondientes también. Esta es la situación para la matriz del ejemplo siguiente

EJEMPLO 3.13 *Hallar la forma diagonal de* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *En este caso* $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ *y sus raíces son* $\lambda_1 = i$ *y* $\lambda_2 = -i$. *Buscamos ahora los autovectores complejos asociados a esto autovalores. Para* $\lambda_1 = i$ *se tiene el sistema*

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el autovector que se obtiene es $\overrightarrow{z}_1 = (1, i)$. *Si hacemos lo mismo con* $\lambda_2 = -i$ *obtenemos un sistema parecido:*

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esto se sigue que el autovector asociado es $\overrightarrow{z}_2 = (1, -i)$. *Se puede ver que los vectores complejos* $\overrightarrow{z}_1$ *y* $\overrightarrow{z}_2$ *obtenidos son l.i. y además, que*

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{z}_1 &= i\overrightarrow{z}_1 \\ A\overrightarrow{z}_2 &= -i\overrightarrow{z}_2 \end{aligned}$$

Luego la matriz en la nueva base es

$$A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

También se puede comprobar que

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora ejemplos de matrices 3×3. El procedimiento es el mismo. Nos centraremos en aquéllos casos para los que la forma diagonal existe, es decir en las situaciones para las que existe una base de autovectores. Al estar en dimensión 3 necesitamos 3 autovectores l.i. La dimensión también es la responsable de que el cáclulo de los autovalores sea más complicado ya que el polinomio característico es ahora de orden tres.

Ejemplo 3.14 *Diagonalizar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Para el cálculo del determinante es recomendable emplear operaciones elementales que lo simplifiquen. Para este caso no es preciso pues se puede desarrollar por la primera columna:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= 4\lambda^2 - 3\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

Usamos ahora la regla de Rufini para afirmar que los autovalores son $3, 0$ *y* 1. *Ahora calculamos los autovectores asociados.*

1. $\lambda = 3 :$ *hemos de resolver* $(A - 3I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos operaciones sobre la matriz:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar al sistema

$$\begin{aligned} x - z/2 &= 0 \\ y - (3/2)z &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $x = \frac{1}{2}z$ *e* $y = \frac{3}{2}z$; *esto significa que toda solución se escribe como*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}$$

Tomamos como vector propio a

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda = 0$: *hemos de resolver* $(A)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tiene como solución general a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos como segundo vector propio a

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\lambda = 1$: *hemos de resolver* $(A - I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución general de este sistema viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}$$

Los tres autovectores son l.i.. La forma diagonal pedida es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de cambio de base es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3.15 *Diagonalizar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 6\lambda^2 - 11\lambda - \lambda^3 + 6$$

Siguiendo los pasos de antes llegamos a que hay tres autovalores, 1, 2 *y* 3. *Los autovectores correspondientes son* $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *La matriz dada es pues diagonalizable y su forma diagonal es*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.16 *Diagonalizar la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las raíces de

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3 + 8$$

Resolvemos por Ruffini. Las soluciones que se obtienen son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ *y* $\lambda_3 = -2$. *Aunque* -2 *sea un autovalor doble no significa que no podamos encontrar 3 autovectores l.i. Puede que para* $\lambda = -2$ *existan 2 autovectores asociados l.i. Éste no es el caso. Veámoslo:*

1. *Autovectores de* $\lambda = 2$: *resolvemos* $(A - 2I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución general es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *con* $s \in \mathbb{R}$. *Tomamos como autovector a*

$$\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Autovectores de* $\lambda = -2$: *resolvemos* $(A + 2I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz del sistema es 2, luego sólo hay un vector l.i. tomamos

$$\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusión: la matriz no es diagonalizable.

EJEMPLO 3.17 *Idem con la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene como polinomio característico a

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Los autovalores son 1 *(doble) y* -1.

1. *Autovectores de* $\lambda = 1$: *resolvemos* $(A - I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   La solución general es

$$(x, y, z) = s\,(1, 1, 0) + t\,(1, 0, 1)$$

   Hay pues dos vectores l.i. que son solución. Tomemos éstos:

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, 1, 0)\,,\ \overrightarrow{u}_2 = (1, 0, 1)\,.$$

2. *Autovectores de* $\lambda = -1$: *resolvemos* $(A + I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *esto es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   La solución general es

$$(x, y, z) = s\,(0, 1, 1)$$

   Tomamos como autovector a

$$\overrightarrow{u}_3 = (0, 1, 1).$$

Como a pesar de tener solamente dos autovalores, hemos encontrado una base de autovectores la matriz dada es diagonalizable y su forma diagonal es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Sistemas Dinámicos

Nos vamos a fijar en dos situaciones interesantes. Se corresponden con los modelos de diferencias finitas y con los modelos dados a través de ecuaciones diferenciales.

3.3.1. Ecuaciones en diferencias

Vamos a analizar sistemas dinámicos expresados mediante sistemas lineales discretos. Para esto nos es suficiente la resolución de algunos ejemplos.

EJEMPLO 3.18 *En cada ciclo de un año se sabe que el 20 % de la gente que vive en Toledo se va a vivir fuera, y que el 10 % que vive fuera, dentro de la provincia, se traslada a dicha capital. ¿Qué evolución o tendencia tiene la población de Toledo a medida que pasa el tiempo?*
Denotamos por u_n la que vive dentre en el año n y por v_n la que vive fuera. Si partimos de un año en el que hay u_0 y v_0 dentro y furera respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} u_1 &= (0{,}8)u_0 + (0{,}1)\,v_0 \\ v_2 &= (0{,}2)\,u_0 + (0{,}9)\,v_0 \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} u_n &= (0{,}8)u_{n-1} + (0{,}1)\,v_{n-1} \\ v_n &= (0{,}2)\,u_{n-1} + (0{,}9)\,v_{n-1} \end{aligned}$$

o en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

o más simplificamdamente:

$$\overrightarrow{E}_n = A\overrightarrow{E}_{n-1}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

y

$$\overrightarrow{E}_j = (u_j, v_j)$$

La cuestión es como es el vector $\overrightarrow{E}_n(u_n, v_n)$ *cuando* n *es grande.*
Es más o menor directo verificar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}_1 &= A\overrightarrow{E}_0 \\ \overrightarrow{E}_2 &= A\overrightarrow{E}_1 = AA\overrightarrow{E}_0 = A^2\overrightarrow{E}_0 \\ &\vdots \\ \overrightarrow{E}_n &= A\overrightarrow{E}_{n-1} = AA\overrightarrow{E}_{n-2} = \cdots = A^n\overrightarrow{E}_0 \end{aligned}$$

Esto significa que para saber cuál es el estado $\overrightarrow{E}_n$ *es suficiente con calcular* A^n. *En esta situación nos planteamos hacer un cambio de base con el fin de que* A *se tranforme en una matriz* A' *con el mayor número de ceros posible. En concreto buscamos una matriz* A' *diagonal, una matriz con la forma* $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. *Si esto se consigue, es decir, si hay una base con respecto a la cual* A *se transforma en* A' *diagonal entonces los cálculos son prácticamente directos: puesto que existe una matriz de cambio de base que relaciona a* A *con* A' *de la forma*

$$A' = C^{-1}AC$$

entonces

$$A = CA'C^{-1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \left(CA'C^{-1}\right)\left(CA'C^{-1}\right) \\ &= CA'C^{-1}CA'C^{-1} \\ &= CA'IA'C^{-1} \\ &= CA'A'C^{-1} \\ &= C\,(A')^2\,C^{-1} \end{aligned}$$

pero

$$(A')^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = CA'C^{-1}C\left(A'\right)^2C^{-1} \\ &= C\left(A'\right)^3C^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\left(A'\right)^3 = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^3 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^3 \end{pmatrix}$$

En general se tiene que

$$A^n = C\left(A'\right)^n C^{-1}$$

con

$$\left(A'\right)^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

que es la fórmula de cálculo que emplearemos para deducir el estado $\overrightarrow{E}_n$ *una vez que conozcamos el cambio de base, la matriz* C*, y la nueva matriz formada por* λ_1 *y* λ_2.

Determinemos la forma diagonal de $A = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$*: Los autovalores son* 1 *y* $\frac{7}{10}$*, y los autovectores asociados son* $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *respectivamente. Como*

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}_n &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \overrightarrow{E}_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además se ve claramente (pues $\left(\frac{7}{10}\right)^n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*) que*

$$\overrightarrow{E}_n \to \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(u_0 + v_0) \\ \frac{2}{3}(u_0 + v_0) \end{pmatrix}$$

Esto se interpreta diciendo que la tendencia es a que $\frac{1}{3}$ *de la población viva dentro y* $\frac{2}{3}$ *viva fuera.*

EJEMPLO 3.19 *Supongamos que hay una epidemia en la que cada semana enferman la mitad de los que están sanos, y muere un 25 % de los que están enfermos. Se supone que en el estado inicial todos los individuos de la población est´na sanos.*
Describamos la dinámica de este sistema:
En la semana n *hay* x_n *muertos,* y_n *enfermos y* z_n *sanos. Entonces*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$$

La pregunta que sería razonabe es saber cuándo desaparecería la población. En todo caso el procedimiento para poder aclarar esto sería el mismo que antes, hacer un cambio de base con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

para llegar a que

$$A = CA'C^{-1}$$

con A' *diagonal. Por tanto tendríamos*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= C\,(A')^n\,C^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= C \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resta por evalurar la matriz diagonal de A *y la matriz de cambio de base* C*. Los autovalores son* 1, $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{3}{4}$*. Los vectores propios correspondientes son* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ -2{,}0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1{,}0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. La forma diagonal es*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n & 1+2^{-n}-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n & -2^{1-n}+2\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Este es el término general, el cual, en el límite, tiende a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+y_0+z_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el estado límite es $(x_0+y_0+z_0, 0, 0)$, *lo que significa que al final todo el mundo muere.*

Ejemplo 3.20 (Sucesión de Fibonacci) *La sucesión de Fibonacci es*

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ ...$$

De manera recurrente es $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *y* $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$ *para* $k = 0, 1, 2, ...$
El objetivo es encontrar una fórmula para el término $k-$*ésimo de la sucesión y poder investigar cómo es el crecimiento de dicha sucesión. Hagamos para ello lo siguiente:*

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k-1}+x_k \\ x_k \end{pmatrix}$$

$_{k+1}$ *para* $k = 0, 1, 2, ...$*Si definimos*

$$\overrightarrow{X}_k = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix},\ k = 0, 1, 2, ...$$

vemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}_k &= \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}_{k-1} \end{aligned}$$

Se trata por tanto de un sistema dinámico lineal para el que tenemos

$$\overrightarrow{X}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \overrightarrow{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez más, el procedimiento finaliza con el cálculo de la potencia $n-$ésima de una matriz. En este caso el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Los autovectores se calculan fácilmente: para λ_1 hemos de resolver

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual da como soluciones a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$*. Entonces tomamos como autovector a*

$$\overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, 1\right)$$

Para λ_2 hemos de resolver

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto proporciona como vector propio a

$$\overrightarrow{v} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}, 1\right)$$

Para concluir realizamos el cálculo de la potencia n :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \\ = \;& CA'^n C^{-1} \\ = \;& \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \;& \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}_n &= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por ende

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n$$

Puesto que $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx -0{,}618\,03$ *entonces,*

$$x_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n$$

si n *es grande*[3]*. En concreto,* x_n *debe ser el número entero más cercano a* $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n$ *supuesto* n *grande.*
Con n *grande la proporción* $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ *se mantiene constante pues de nuevo* $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n$ *se hace muy pequeño, se tiene*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \lambda_1 \approx 1.\,618$$

número que recibe el nombre de razón áurea

Como se ha podido comprobar la eficiencia en el estudio depende de si encontramos una forma diagonal para la matriz del sistema dinámico con el que estamos trabajando.

3.3.2. Ecuaciones diferenciales

Usamos la teoría de Álgebra Lineal desarrollada para resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. El único hecho sobre ecuaciones diferenciales que tenemos que tener en cuenta es el siguiente:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda e^{\lambda t}. \tag{3.4}$$

[3] $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n \to 0$ si $n \to \infty$

Comenzamos con la ecuación

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t)$$

Una solución es $u(t) = e^t$, pero también lo son $u(t) = Ce^t$, con C cualquier constante. De la misma manera, y usando la igualdad (3.4), una solución de

$$\frac{du(t)}{dt} = \lambda u(t) \tag{3.5}$$

es $u(t) = e^{\lambda t}$. Como antes toda solución se puede escribir como

$$u(t) = Ce^{\lambda t}$$

con C cualquier constante.

Si a la ecuación diferencial (3.5) le imponemos la condición

$$u(0) = c_0 \tag{3.6}$$

entonces tenemos como solución (única) a

$$u(t) = c_0 e^{\lambda t}.$$

Generalizamos dando los pasos análogos.

Supongamos ahora que en lugar de λ en (3.5) lo que tenemos es una matriz A de orden $n \times n$ y que $u(t)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, esto es, que es

$$u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t)).$$

Buscamos pues n funciones $u_i(t)$, $i = 1, ..., n$, con $t \in I$, I cierto intervalo de la recta real, que cumpla el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \tag{3.7}$$

Eventualmente impondremos la condición inicial

$$u(t_0) = u_0 \tag{3.8}$$

$t_0 \in I$.

Las igualdades (3.7) y (3.8) se pueden escribir de manera más detallada: suponiendo que la

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

las identidades (3.7) y (3.8) se corresponden con

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

y

$$(u_1(t_0), ..., u_n(t_0)) = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0n})$$

NOTA 3.2 *Conviene observar que el conjunto de llas soluciones de (3.7) tiene estructura de espacio vectorial: si $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones de este sistema, entonces tmaibén lo es $cu(t) + dv(t)$, para cualquiera que sean c y v números reales. En particular $u(t) = \overrightarrow{0}$ es solución.*

NOTA 3.3 *Supondremos que las funciones incógnita $u_i(t)$ son fucniones derivables con respecto a la variable independiente t.*

Nos interesa hallar soluciones de (3.7) distintas de la solución trivial $u(t) = \overrightarrow{0}$. Veasmos el método y cuál es su relación con la teoría lineal.

3.3.3. Solución general de un sistema lineal

Para $n = 1$ ya hemos visto que la solución general es $u(t) = Ce^{\lambda t}$. Con esta solución general la solución particular del problema de valores iniciales (3.5) y (3.6) es $u(t) = c_0 e^{\lambda t}$.

Para $n > 1$ el procedimiento es parecido. Busquemos una solución bajo el formato

$$u(t) = e^{\lambda t}\overrightarrow{x}$$

donde

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Hacemos su derivada para sustituir más tarde en la parte izquierda de la igualdad (3.7):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(u\left(t\right)\right) &= \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\overrightarrow{x}\right)=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^{\lambda t}x_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}x_1\right) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}x_n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t}x_1 \\ \vdots \\ \lambda e^{\lambda t}x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} e^{\lambda t}x_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}x_n \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

Si ahora sustituimos en (3.7), el vector $u\left(t\right)=e^{\lambda t}\overrightarrow{x}$ será solución sii

$$\lambda e^{\lambda t}\overrightarrow{x}=A\left(u\left(t\right)\right)=A\left(e^{\lambda t}\overrightarrow{x}\right)=e^{\lambda t}A\left(\overrightarrow{x}\right)$$

Dividiendo por $e^{\lambda t}$ llegamos a que $u\left(t\right)$ es solución sii

$$A\left(\overrightarrow{x}\right)=\lambda\overrightarrow{x}$$

esto es, sii λ es autovalor de la matriz A con autovector $\overrightarrow{x}$.

Ya tenemos pues un método para encontrar soluciones distintas de cero para el sistema (3.7). Como las soluciones constituyen un espacio vectorial, cualquier combinación lineal entre ellas también es solución. Por tanto si cada expresión de la forma $e^{\lambda_i t}\overrightarrow{x}_i$ es solución, entonces también lo es

$$\overrightarrow{u}\left(t\right)=c_1e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{x}_1+...+c_ke^{\lambda_i t}\overrightarrow{x}_k$$

siendo las c_i constantes cualesquiera, los λ_i los autovalores y $\overrightarrow{x}_i$ los correspondientes autovectores de la matriz A.

Si pretendemos resolver (3.7)-(3.8) tendremos que encontrar aquellos parámetros c_ia tales que

$$u\left(t_0\right)=u_0$$

i.e., los que cumplen

$$u\left(t_0\right)=c_1e^{\lambda_1 t_0}\overrightarrow{x}_1+...+c_ke^{\lambda_i t_0}\overrightarrow{x}_k=u_0.$$

Debemos tener en cuenta que para que se cumpla esta relación u_0 ha de estar necesariamente generado por los autovectores, si no es así entonces no habrá solución para $u\left(t_0\right)=u_0$. Un caso para el que si está asegurado es aquél en el que encontramos n autovectores ($k=n$), habría una base de autovectores y siempre podríamos encontrar los c_i para que $u\left(t_0\right)=u_0$.

3.3.4. Solución de un sistema mediante un cambio de variable

Otra forma de exponer lo explicado antes consiste en realizar un cambio de variable. En efecto, si el sitema a resolver es

$$\frac{du}{dt} = Au$$

entonces la forma diagonal de A, A', cumple $A' = C^{-1}AC$, y el sistema se reescribe

$$\frac{du}{dt} = CA'C^{-1}u$$

Si hacemos el cambio de variable $u = Cv$ (ó $v = C^{-1}u$) y tenemos en cuenta que

$$\frac{dv}{dt} = C^{-1}\frac{du}{dt}$$

entonces lo de arribe se expresa como

$$\frac{dv}{dt} = A'v$$

esto es, queda el sistema diagonal

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dv_n(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

Resolvemos y queda

$$v_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t)$$

Finalmente dehacemos el cambio y la solución será $u = Cv$.

Ejemplo 3.21 *Resolver el sistema*

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

con la condición inicial

$$(x_1(0), x_2(0)) = (1, -1).$$

Puesto que la forma diagonal de la matriz del sistema es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con matriz de cambio de base

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que el sistema a resolver $\frac{dv}{dt} = A'v$ *es*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dv_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

lo que da $v_1(t) = c_1 \exp(-t)$ *y* $v_2(t) = c_2 \exp(t)$. *Deshacemos el cambio y obtenemos la solución*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \exp(-t) \\ c_2 \exp(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nótese que también es válida la siguiente expresión para la solución

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Busquemos ahora la solución particular que cumple $(x_1(0), x_2(0)) = (1, -1)$. *Basta con ir a la solución anterior e imponer el valor inicial dado:*

$$\begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos $c_1 = -1$ *y* $c_2 = 0$. *Por tanto la función pedida es*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3.22 *Resolver el sistema*

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

con el dato inicial

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))_{t=0} = (4, 5, 6).$$

Los autovales son 1, 2 *y* 3, *y los autovectores asociados son* $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ *y* $w = (1, 1, 1)$. *Por tanto la solución general es*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si queremos que cumpla la condición inicial dada basta resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

para obtener $c_1 = c_2 = 1$ *y* $c_3 = 4$.

3.4. Ejercicios

1. Probar que $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es una base en $\mathbb{R}^3$ y encontrar las coordenadas del vector $v = (1,2,-4)$ en dicha base. Hallar la matriz de cambio de base, de la base canónica a B.

2. Respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ hallar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

   a) giro de α grados con respecto al eje Z (o recta cuyo vector director es $\overrightarrow{e}_3 = (0,0,1)$)

   b) Simetría con respecto a la recta $x = 0$, $y = 0$.

   c) Proyección sobre el plano $x - y + z = 0$.

   d) Simetría con respecto a la recta $(x,y,z) = t(1,1,1)$

   e) Giro de 90 grados con respecto a la recta $x + y = 0$,$z = 0$.

3. Sabiendo que la aplicación lineal $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ lleva los vectores

$$u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (1,1,0),\ u_3 = (1,1,1)$$

   de $\mathbb{R}^3$ en los vectores

$$w_1 = (2,1,2), w_2 = (3,1,2),\ w_3 = (6,2,3)$$

   respectivamente, encontrar la matriz de A en las siguientes bases:

   a) La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) La base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

4. Hallar los autovalores reales y autovectores de $\mathbb{R}^n$, y una base de autovectores cuando sea posible, de las matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, d)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Hallar los autovalores y autovectores de las aplicaciones lineales de$\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ cuyas matrices asociadas son:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Decir cuáles de las siguientes matrices pueden reducirse a una diagonal y encontrar una matriz de cambio de base:

$$a) \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Determinar para qué valores $a,\, b \in \mathbb{R}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable.

8. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & a & 4-a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix},$$
probar que ésta es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

9. Probar que los autovalores de una matriz real y simétrica de orden dos son siempre reales.

10. Encontrar la forma diagonal y la matriz de cambio de base correspondiente de las matrices

$$a) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ b) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ b) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

11. Encontrar todos los subespacios invariantes de la aplicación $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ que tiene como matriz asociada a
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Hallar la potencia $n-$ésima de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

13. Se dan las sucesiones recurrentes

$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n &= 5u_{n-1} + v_{n-1}, \end{aligned}$$

con $u_0 = 1$ y $v_0 = 1$. Hallar u_n y v_n en función de n.

14. Estudiar la dinámica de un punto cuyas coordenadas en el instante n vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 0 \\ -3/2 & -2 & 0 \\ -6 & -6 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

15. Sea el sistema dinámico lineal discreto dado mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Encontrar el estado límite $\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. ¿Cómo debe ser α para que $\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ pertenezca a la recta cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (1, \alpha)$?

16. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con $x \in \mathbf{R}$.

a) Encontrar x para que A sea diagonalizable.

b) Sea el sistema dinámico lineal discreto dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y}(t) &= \frac{1}{r} A \overrightarrow{y}(t-1), \quad t = 1, 2, ... \\ \overrightarrow{y}(0) &= \overrightarrow{y}_0 \end{aligned}$$

con $\overrightarrow{y}_0$ un cierto vector de $\mathbf{R}^3$ y r un número real positivo. Demostrar que si A es diagonalizable entonces para cualquier vector $\overrightarrow{y}_0$ se da la equivalencia

$$\lim_{t\to\infty} \overrightarrow{y}(t) = \overrightarrow{0} \iff r > \max\left\{2, 1 + \sqrt[2]{5 - 2x}\right\}$$

17. Una partícula se mueve en le plano de manera que su posición en el instante t viene dada por el vector (x_t, y_t) (con $t \geq 0$) y además

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Dependiendo de la posición inicial (es decir del vector (x_0, y_0)), estudiar la posición límite de dicha partícula.

18. Según la Ley de Newton la velocidad de enfriamiento de un cuerpo al aire libre es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente. Sea la temperatura del aire igual a 20^o C; si el cuerpo se enfría de 100^o C a 60^o C en 20 minutos, ¿qué tiempo se necesita para que la temperatura del cuerpo baje hasta 30^o C?

19. Comprueba que la función $y = \frac{C_1}{x} + C_2$ es solución de la EDO de orden 1 $y'' + \left(\frac{2}{x}\right) y' = 0$.

20. Resuelve las siguientes ecuciones con variables separables:

    a) $ydx - xdy = 0$
    b) $dx - (1-x)\,dy = 0$
    c) $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$

21. Resolver las siguientes ecuaciones lineales de primer orden:

    a) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$.
    b) $(x - x^2)\,y' + (2x^2 - 1)\,y = 2x^3$
    c) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$, $y(1/2) = 1$
    d) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{a}{x^2}$ (a es una constante), $y\,(1) = 2$

22. Resuelve los siguientes problemas:

    a) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$
    b) $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$
    c) $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}$, $(x(0), y\,(0)) = (2, 3)$

23. Hallar la solución general, y en su caso la particular, de las siguientes EDO's lineales homogéneas de orden dos:

    a) $y'' - 7y' + 12y = 0$

    b) $y'' + 6y' + 5y = 0$

    c) $y'' + 4y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

24. Hallar la solución general, y en su caso la particular, de las siguientes EDO's lineales no homogéneas de orden dos:

    a) $y'' - y = 5x + 2$

    b) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

    c) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$